



WHITE PAPERS

ASK-RD-ENG-014

R&D Department

ARYA SEPEHR KAYHAN (ASK) | SHAHID SALIMI INDUSTRIAL CITY, TABRIZ, IRAN

شرکت آریا سپهر کیهان با نام اختصاری ASK، طراح و تولیدکننده پمپ های گریز از مرکز و روتاری و ارائه دهنده راهکارهای بهینه سازی سیستم های فرایندی و پمپاژ می باشد.

توجه!

مقالات تخصصی با عنوان White Papers جهت افزایش دانش عمومی پمپ ها در بخش تحقیق و توسعه این شرکت نگارش شده است. استفاده از این مقالات رایگان می باشد و لازم است جهت استفاده از محتویات آن به موارد ذیل توجه فرمایید:

- 1- انتشار مجدد مطالب مقالات (به شکل اولیه و بدون تغییر در ساختار محتوایی و ظاهری) با ذکر منبع، بلامانع است.
- 2- استفاده تجاری از محتویات مقالات در نشریات مجاز نمی باشد.

تحلیل سرعت بحرانی در پمپ

برای تحلیل رفتار ارتعاشی پمپ ها، باید به بررسی رفتار ارتعاشی شفت پرداخته شود. یک شفت تحت دو نوع ارتعاش قرار می گیرد:

۱. ارتعاش پیچشی

۲. ارتعاش خمشی

در حوزه ی ارتعاشات خمشی، پارامتر مهمی در طراحی وجود دارد که سرعت بحرانی نامیده می شود. سرعت بحرانی، سرعتی است که در آن فرکانس دوران برابر با فرکانس طبیعی خمشی می شود. همانطور که از اسم این پارامتر پیداست، کارکرد پمپ در این سرعت مجاز نیست و باعث رزونانس می شود لذا معمولا محدوده ی کاری پمپ را طوری انتخاب می کنند که شامل سرعت بحرانی نشود.

اگر محدوده ی سرعت بحرانی کوچک باشد، محدوده ی عملکرد پمپ بعد از سرعت بحرانی انتخاب می شود و شفت را انعطاف پذیر می نامند. اگر محدوده سرعت بحرانی بزرگ باشد، محدوده عملکردی پمپ قبل از آن انتخاب می شود و شفت را صلب می نامند.

پیش از بررسی سرعت بحرانی در شفت ها توضیح کوتاهی پیرامون خیز شفت داده می شود. دو نوع خیز شفت وجود دارد:

۱. خیز استاتیکی

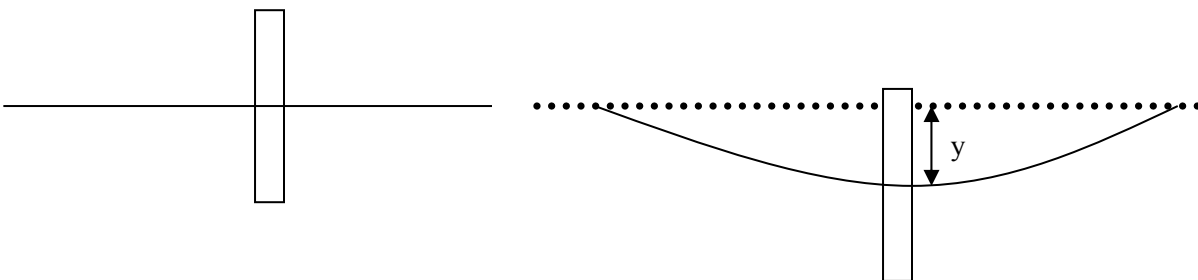
۲. خیز دینامیکی

خیز استاتیکی ناشی از وزن شفت و سایر ادواتی است که به آن متصل است. مثلا در کاربرد پمپ ها، وزن روتور یکی از عوامل اصلی خیز استاتیکی در پمپ های افقی است. خیز دینامیکی ناشی از دوران نیروی گریز از مرکزی است که ناشی از عدم بالانس روتور است.

در زیر انواع مدل های ارتعاشاتی شفت و روتور بررسی می شود:

❖ شفت بی وزن + پروانه

در شکل ۱ هندسه ی این مدل نشان داده شده است.



شکل ۱

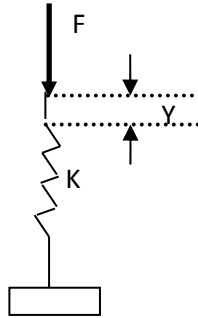
همانطور که در شکل فوق مشخص است، فرض شده که مرکز دوران بر مرکز جرم منطبق باشد. در این شرایط نیروی گریز از مرکز حاصل برابر است با:

$$F = M y \omega^2$$

حال اگر سیستم نشان داده شده در شکل ۱ را با سیستم فنر شکل ۲ مدل کنیم، خواهیم داشت:

$$F = ky$$

که در آن k ضریب سختی فنری است که مجموعه ی شفت بی وزن و پروانه با آن مدل شده است.



شکل ۲

با معادل قرار دادن دو رابطه ی فوق مقدار خیز سرعت دورانی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

سئوالی که ممکن است مطرح شود این است که سرعت دورانی به دست آمده چرا سرعت بحرانی است؟ در پاسخ باید گفت که شرایطی که دو نیروی نام برده برابر می شوند شرایط تعادل خنثی است. یعنی هرگونه نیروی کوچک دیگری به سیستم وارد شود، سیستم از حالت پایداری خارج می شود و خیز شفت بسیار زیاد شده و می شکند. در واقع تنها در این حالت است که نیروهای گریز از مرکز با نیروی الاستیک شفت خنثی می شود.

رابطه ی عمومی برای تمامی حالات معادله ای به صورت زیر خواهد بود:

$$y = \frac{\omega^2}{\omega_c^2 - \omega^2}$$

با استفاده از معادله ی فوق به راحتی می توان نتایج زیر را برداشت کرد:

۱. اگر سرعت کاری بزرگتر از سرعت بحرانی باشد، خیز تیر منفی خواهد شد.
۲. اگر سرعت کاری کوچکتر از سرعت بحرانی باشد، خیز تیر مثبت خواهد بود.
۳. در حالت اول، با افزایش سرعت دورانی خیز تیر به مقدار صفر میل می کند. به عبارت دیگر تیر خود را در حالت توازن حفظ می کند.
۴. در حالت دوم، با افزایش سرعت دورانی، خیز تیر به بی نهایت میل می کند. به عبارت دیگر تیر به حالت شکست نزدیک می شود.

از طرفی می دانیم که خیز استاتیکی ناشی از وزن از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$W = k y_0$$

با استفاده از این رابطه مقدار k از خواص الاستیکی شفت به دست می آید:

$$k = \frac{W}{y_0}$$

با جاگذاری مقدار k در رابطه ی سرعت بحرانی داریم:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{W}{y_0}}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{m g}{y_0}}{m}} = \sqrt{\frac{g}{y_0}}$$

لذا با داشتن خیز استاتیکی می توان سرعت بحرانی را تعیین کرد.

❖ شفت بی وزن + چند پروانه

برای مدل کردن این حالت نیز از همان اصول قبلی استفاده می شود. در کل، برای مدل کردن سیستم می توان از بارگذاری های مختلف روی تیرها استفاده کرد. به این وسیله سختی تیر به دست آمده و محاسبه ی سرعت بحرانی کاری ساده خواهد بود.

در جدول ۱ برای سهولت حالات معمول بارگذاری تیر آورده شده است. هر چه تعداد پروانه ها بیشتر باشد تعداد سرعت بحرانی بیشتر خواهد بود. دو پروانه دو سرعت بحرانی و k پروانه k سرعت بحرانی خواهد داشت.

❖ شفت واقعی (وزن قابل توجه)

تاکنون مطالبی که بیان شد با این فرض بود که شفت وزن قابل توجهی ندارد ولی در واقعیت وزن شفت نیز حائز اهمیت است. با وارد کردن وزن شفت به محاسبات، دیگر مجاز به استفاده از خیز استاتیکی نیستیم. دلیل این محدودیت این است که وزن شفت در یک نقطه وارد نمی شود بلکه به صورت بار گسترده روی شفت توزیع می شود.

برای رفع این محدودیت، ضریب تصحیحی توسط باومن ارائه شده است که رابطه ی سرعت بحرانی را به صورت زیر ارائه می کند:

$$\omega_c = \sqrt{C \frac{g}{y_0}}$$

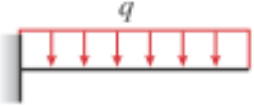

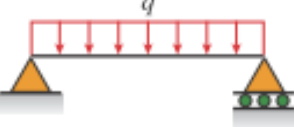
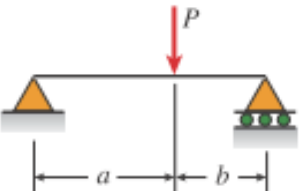
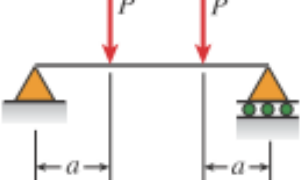
در رابطه ی فوق y_0 بیشترین خیز استاتیکی شفت می باشد. مقدار C که ضریب تصحیح باومن است همواره در بازه ی ۱ تا ۱/۲۶۸۵ می باشد. در برخی موارد خاص مقدار این ضریب برابر است با:

برای بارگذاری متمرکز : $C=1$

برای شفت وزن دار : $C=1.2685$

برای پمپ های چند طبقه : $C= 1.08$

جدول ۱

	$\omega_c = \sqrt{\frac{12.4 EI}{qL^3}}$
	$\omega_c = \sqrt{\frac{3 EI}{PL^3}}$
	$\omega_c = \sqrt{\frac{98 EI}{qL^3}}$
	$\omega_c = \sqrt{\frac{3 E I L}{P a^2 b^2}}$
	$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{6 EI}{P a^2 (3L-4a)}}$ $\omega_{c2} = \sqrt{\frac{6 E I L}{P a^2 (L-2a)^2}}$

جدول ۱ برای محاسبه ی سرعت مخصوص در بارگذاری های گسترده مفید است.

❖ روش های کلی محاسبه ی سرعت بحرانی

۱. روش رایلی

روش رایلی در واقع روشی مبتنی بر پایستاری انرژی است. در این روش ماکزیمم انرژی پتانسیل و ماکزیمم انرژی جنبشی سیستم ارتعاشی محاسبه شده و با برابر قرار دادن مقادیر آنها سرعت بحرانی به دست می آید. اگر اجزای مختلف در نقاط مختلف شفت، نیروهای P_1, P_2 و ... را وارد کنند و در نقاط متناظر خیز y_1, y_2 و ... به وجود آید، برای نیروهای جنبشی و پتانسیل ماکزیمم خواهیم داشت:

$$P \cdot E_{max} = \frac{1}{2} P_1 y_1 + \frac{1}{2} P_2 y_2 + \dots$$

$$K.E_{max} = \frac{1}{2} m_1 y_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m_2 y_2^2 \omega^2 + \dots$$

که در آن m جرم هر قطعه است و با توجه به این نکته که نیرو در اثر گرانش آن است می توان نوشت :

$$m_i = \frac{P_i}{g}$$

لذا:

$$K.E_{max} = \frac{1}{2} \frac{P_1}{g} y_1^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} y_2^2 \omega^2 + \dots$$

با برابر قرار دادن دو معادله ی انرژی پتانسیل و جنبشی مقدار سرعت بحرانی به دست می آید:

$$K.E_{max} = P.E_{max}$$

$$\frac{1}{2} \sum P_i y_i = \frac{1}{2} \sum \frac{P_i}{g} y_i^2 \omega^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{\sum P_i y_i}{\sum \frac{P_i}{g} y_i^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{g} \frac{\sum P_i y_i}{\sum P_i y_i^2}}$$

در بیشتر مصارف عملی، قطر شفت در نواحی مختلف تغییر می کند. در چنین مواردی، استفاده از این رابطه با جاگذاری جرم هر قسمت و خیز استاتیکی متناظر آن منجر به پاسخی می شود که کوچکتر از سرعت بحرانی واقعی است ولی تقریب خوبی از پاسخ اصلی است.

۲. روش دانکرلی

در روش دانکرلی معادله ی زیر ارائه شده است که به وسیله ی آن سرعت بحرانی محاسبه شود:

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \frac{1}{\omega_s^2} + \frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2} + \dots + \frac{1}{\omega_n^2}$$

که در آن :

ω_c : سرعت بحرانی کل سیستم

ω_s : سرعت بحرانی شفت بدون اعمال هیچ باری

ω_1 : سرعت بحرانی بار شماره ی ۱ بر روی یک شفت بی وزن

ω_2 : سرعت بحرانی بار شماره ی ۲ بر روی یک شفت بی وزن

ω_n : سرعت بحرانی بار شماره ی n بر روی یک شفت بی وزن

حال اگر رابطه ی فوق را در رابطه ی $\omega_c = \sqrt{\frac{g}{y_0}}$ قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\omega_c = \sqrt{\frac{g}{\sum y_i}}$$

همانطور که در جدول ۱ قابل مشاهده است، اگر هر قسمت از شفت را یک شفت جداگانه در نظر بگیریم، خیز هر قسمت از رابطه ی زیر محاسبه می شود:

$$y_i = \frac{W_i a_i^2 b_i^2}{3EIL}$$

که در آن W_i بار هر قسمت و b_i و a_i فواصل این بارها تا دو تکیه گاه است. ا ممان اینرسی است که از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$I = \frac{\pi d^4}{64}$$

که در آن d قطر معادلی است که از رابطه ی زیر نتیجه می شود:

$$d = \frac{\sum a_i L_i}{L}$$

صورت کسر فوق مجموع ضرب قطر در طول هر قسمت است و مخرج کسر طول کل شفت است.

با جاگذاری خیز هر قسمت شفت در معادله ی اصلی، رابطه ی نهایی به صورت زیر به دست می آید:

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{3 E I L}{\sum W_i a_i^2 b_i^2}}$$

۳. رابطه ی تخمینی

سرعت بحرانی را می توان با رابطه ی تخمینی زیر تقریب زد:

$$\omega_{c1} = \sqrt{\frac{C E I g}{W L^3}}$$

برای استفاده از این رابطه باید پارامترهای آن را در واحدهای زیر ارائه کرد:

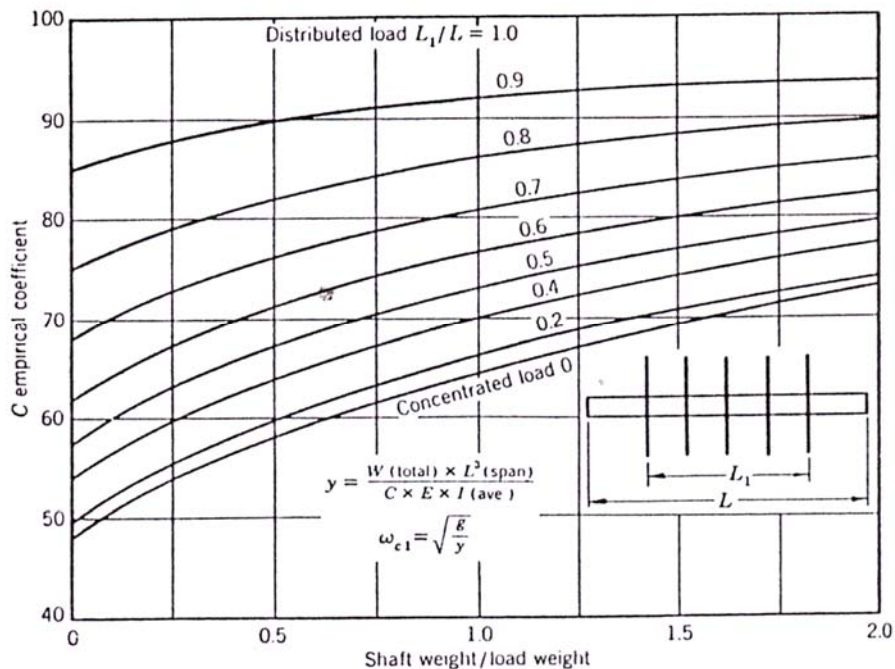
W وزن کل روتور در واحد lb

L فاصله ی دو تکیه گاه ساده در واحد in

E مدول الاستیسیته شفت در واحد lb/in^2

I ممان اینرسی در واحد in^4

برای به دست آوردن مقدار ضریب C به شکل ۳ مراجعه شود.



شکل ۳

همانطور که در ابتدای این مقاله بیان شد، ارتعاشات پیچشی نیز علاوه بر ارتعاشات خمشی حائز اهمیت است. در ارتعاشات پیچشی نیز سرعت بحرانی وجود دارد. در پمپ ها اگر ادوات روی شفت را به دو بخش چرخ و کوپلینگ - موتور تقسیم کنیم (مانند شکل ۴) سرعت بحرانی پیچشی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$\omega_c = 60 \sqrt{\frac{I_p E_s (J_1 + J_2)}{J_1 J_2 L}}$$

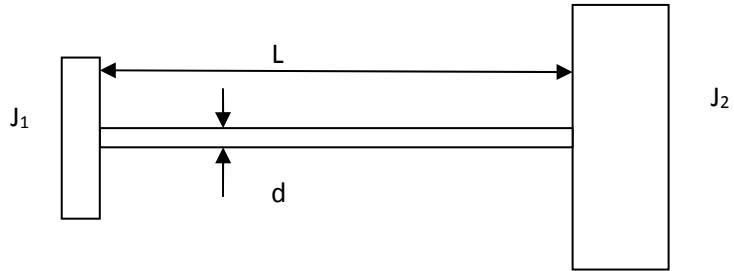
که در آن:

$$I_p = \frac{\pi}{32} d^4 \text{ (in}^4\text{)}$$

$$J_i = \frac{W_i}{g} R_i^2$$

\bar{R}_i شعاع ژیراسیون جرم i است. همچنین لازم به ذکر است که E_s مدول الاستیسته ی برشی شفت است. در مواردی که شفت در نواحی مختلف قطرهای مختلفی دارد، می توان از قطر معادل استفاده کرد. پس از استفاده از قطر معادل باید با استفاده از رابطه ی زیر طول را نیز به طول معادل تبدیل کرد:

$$L_{eq_i} = \left(\frac{d_e}{d_i}\right)^4 L_i$$



شکل ۴